$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Resoudre $A^2 = B \Rightarrow$ on cherche A

methode 1 on diagonolise B pour trouver facilement A

methode 2 si on peut pas diagonolisé :

on cherche à simplifier $A \longrightarrow A = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$

on prouvant : si X $\vec{vp}$ de B Alors X $\vec{vp}$ de A

$$\chi_B = (\lambda-1)^2(\lambda-4) \Rightarrow Sp(A) = \{1, 4\}$$

$$B - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim E_1 = 1 \quad \text{et} \quad E_1 = \text{Vect } e_2$$

$$B - 4I = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim E_4 = 1 \quad \text{et} \quad E_4 = \text{Vect } e_3$$

$\Rightarrow$ B n'est pas diagonalisable

Mq si X $\vec{vp}$ de B Alors X $\vec{vp}$ de A

$X \in E_\lambda(B)$ donc $BX = \lambda X$ $\big\}\, A*$

donc $ABX = \lambda AX$ or $AB = BA = A^3$

donc $B(AX) = \lambda(AX)$

Donc $AX \in E_\lambda(B) = \text{vect } X \Rightarrow \underline{AX \in \text{Vect } X \Rightarrow AX = \mu X}$

on à $Ax = \mu x \Rightarrow x\ \vec{vp}$ de A

on en deduit $e_2, e_3\ \vec{vp}\ B \Rightarrow e_2, e_3\ \vec{vp}\ A$

on en deduit :

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & d & 0 \\ c & 0 & e \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ b(a+d) & d^2 & 0 \\ c(a+e) & 0 & e^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = B$$

$$\begin{cases} a = \pm 1 \\ d = \pm 1 \\ e = \pm 2 \\ b(a+d) = 1 \\ c(a+e) = 1 \end{cases}$$

Ra $a = 1$ et $d = -1 \Rightarrow 0 = 1$

si $a = 1,\ d = 1,\ e = 2 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$ et $c = \frac{1}{3}$

si $a = -1,\ d = -1,\ e = -2 \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$ et $c = -\frac{1}{3}$

si $a = -1,\ d = -1,\ e = 2 \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$ et $c = 1$

si $a = 1,\ d = 1,\ e = -2 \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$ et $c = -1$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2 \end{pmatrix} = -A_2 \quad \text{ou} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = -A_4$$

4 matrice possible pour resoudre $A^2 = B$